Die Aufgabe vom 20.5.2015 (ohne Gewähr!)

Gegeben sei für alle Aufgaben die Funktion $\mathbf{f(x)= - ¼\, x^4 + x^3}$;

1) Bestimme Stellen möglicher lokaler Extrema und skizziere den Kurvenverlauf:

a) Notwendige Bedingung (waagerechte Tangente):

$f'(x)=-x^3+3x^2$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\,(-x+3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee -x+3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$;

b) Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung (fallend/steigend beim Minimum, steigend/fallend beim Maximum, fallend/fallend oder steigend/steigend beim Sattelpunkt):

$f'(-0{,}1) = 0{,}031$; $f'(0{,}1) = 0{,}029$; also kein Vorzeichenwechsel d.h. Sattelpunkt;

$f'(2{,}9) = 0{,}841$; $f'(3{,}1) = -0{,}961$; also Vorzeichenwechsel +/- d.h. Maximum;

c) Bestimmung der y-Werte des Sattelpunktes und des Maximums:

$f(0) = 0$ also **Sat(0 | 0)**;
$f(3) = -¼\, 3^4 + 3^3 = -¼\, 81 + 27 = -20{,}25 + 27 = 6{,}75$ also **Max(3 | 6,75)**

Danach können wir den Verlauf des Graphen in der Umgebung von Sat und Max skizzieren (Grüne Freihandlinien).

Zudem sollte man sich für eine Verlaufsskizze auch immer einen Überblick über die Nullstellen der Funktion verschaffen.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -¼\, x^4 + x^3=0 \Leftrightarrow x^3\,(-¼x+1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee -¼x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$;
Das ergibt also zwei Nullstellen: $\mathbf{N_1}$**(0 | 0)**, die wir schon vom Sattelpunkt kennen und nun auch $\mathbf{N_2}$**(4 | 0)**, die goldfarben in der Zeichnung eingetragen wurde.

Der weitere Verlauf der Funktion ist zwingend, da keine weitere Extrema und Nullstellen vorhanden sein können. Er sollte ungefähr die schwarze Kurve wiedergeben (Graph siehe unten).

2. Bestimme die Tangente und die Normale in P(2 | ?)

a) Gleichung der Tangente:

$f(2)= -¼\, 2^4 + 2^3 = 4 \Rightarrow$ **P(2 | 4)**;

$m_t=f'(2)= -2^3+3 * 2^2=4 \Rightarrow g_t(x)=4x+c$;

Einsetzen der Punktkoordinaten $4=4*2+c \Leftrightarrow c = -4$ $\quad\Rightarrow$ $\mathbf{g_t(x)= 4x - 4}$

Gleichung der Normalen:
$n_t = -1/m_t$; $n_t = -¼ \Rightarrow g_n(x)= -¼x+c$;

Einsetzen der Punktkoordinaten $4 = -\frac{1}{4}*2+c \Leftrightarrow c = 4{,}5$ $\Rightarrow$ **$g_n(x) = -\frac{1}{4}x + 4{,}5$;**

3. Wo schneidet die Tangente den Graphen der Funktion?

$f(x) = g_t(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 4x - 4 \quad | -4x + 4$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 4 = 0$

Eine Nullstelle dieser Gleichung ist bekannt, da die Tangente den Graphen in P(2 | 4) berührt. Also ist x=2 eine doppelte Nullstelle der Gleichung, weiter mit Polynomdivision:

$(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 4) : (x - 2) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$ (Man könnte auch gleich : $(x^2 - 4x + 4)$ rechnen)

$\underline{-(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3)}$

$\frac{1}{2}x^3$

$\underline{-(\frac{1}{2}x^3 - x^2)}$

$x^2 - 4x$

$\underline{-(x^2 - 2x)}$

$-2x + 4$

$\underline{-(-2x + 4)}$

0

$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2 : (x - 2) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

$\underline{-(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2)}$

$0 + x - 2$

$\underline{-(x - 2)}$

0

$-\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0 \; |-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 = -1 \; | *(-4) \Leftrightarrow x^2 = 4 \; | \sqrt{} \Leftrightarrow x = +/- 2$

Weiterer Schnittpunkt bei x=-2 und da f(-2) = -12 schneidet die Tangente den Graph bei **S(- 2| -12)**.

Dieser Schnittpunkt ist nicht mehr im Bild. (Verschiebe die Geogebra-Datei entsprechend).