

# Mathematik

7. / 8. Klasse



# 0. Währungsumrechnung

Der Briefkurs ist ein traditioneller Begriff aus dem Börsenhandel. Es ist der niedrigste Preis, zu dem jemand bereit ist, ein Wertpapier, eine Devisen oder ein sonstiges Finanzprodukt zu verkaufen.

Das Gegenteil vom Briefkurs ist der Geldkurs, zu dem ein Marktteilnehmer bereit ist, ein Wertpapier zu kaufen. Der Briefkurs liegt in der Regel über dem Geldkurs.

|         |        |          |        |         |
|---------|--------|----------|--------|---------|
| 159,86  | + 0,44 | 1/2 Unze | 494,00 | 597,00  |
| 154,64  | + 0,99 | 1 Unze   | 979,00 | 1156,00 |
| 37,78   | + 0,38 | 1/2 Unze | 494,00 | 597,00  |
| 109,61  | + 0,79 |          |        |         |
| 46,30   | + 0,02 |          |        |         |
| 1000,91 | -      |          |        |         |
| 68,94   | - 0,13 |          |        |         |
| 124,80  | + 0,99 |          |        |         |
| 61,45   | + 0,40 |          |        |         |
| 171,71  | + 1,27 |          |        |         |
| 248,87  | + 0,62 |          |        |         |
| 19,03   | + 0,01 |          |        |         |
| 24,59   | + 0,21 |          |        |         |
| 75,42   | + 0,56 |          |        |         |
| 58,02   | + 0,04 |          |        |         |
| 124,44  | - 0,14 |          |        |         |
| 33,91   | -      |          |        |         |
| 14,85   | - 0,01 |          |        |         |
| 95,38   | - 0,32 |          |        |         |
| 40,75   | + 0,01 |          |        |         |
| 41,45   | -      |          |        |         |
| 29,79   | - 0,03 |          |        |         |

| Währungen         |                       |          |                        |          |
|-------------------|-----------------------|----------|------------------------|----------|
| 1 Euro entspricht | Referenzkurse EURO-FX |          | Preise am Bankschalter |          |
|                   | Geld                  | Brief    | Ankauf                 | Verkauf  |
| Dänemark          | 7,4183                | 7,4583   | 7,8700                 | 7,0400   |
| Großbrit.         | 0,9021                | 0,9061   | 0,9530                 | 0,8570   |
| Japan             | 130,5200              | 131,0000 | 138,7400               | 123,9600 |
| Kanada            | 1,4904                | 1,5024   | 1,5880                 | 1,4040   |
| Norwegen          | 9,3495                | 9,3975   | 10,0500                | 8,8100   |
| Schweden          | 9,5935                | 9,6415   | 10,3800                | 9,0600   |
| Schweiz           | 1,1455                | 1,1495   | 1,1940                 | 1,0940   |
| USA               | 1,1771                | 1,1831   | 1,2400                 | 1,1160   |

|  |  |  |         |  |
|--|--|--|---------|--|
|  |  |  | Anzeige |  |
|--|--|--|---------|--|

# 0.1. Dreisatz

Das Verfahren, bei dem wir die Zuordnungstabelle auf drei Zeilen konzentrieren,

- 1) Beziehung zwischen den Ausgangsgrößen
- 2) Schluss auf die Einheit oder eine geeignete Zwischengröße
- 3) Schluss auf die gesuchte Größe

nennen wir **Dreisatz**.

Umgekehrte Fragestellung



|    |        |
|----|--------|
| 12 | 60     |
| 1  | 5      |
| 8  | (?) 40 |

|    |        |
|----|--------|
| 12 | 60     |
| 4  | 20     |
| 8  | (?) 40 |

|         |    |
|---------|----|
| 75      | 15 |
| 5       | 1  |
| (?) 100 | 20 |

|         |    |
|---------|----|
| 75      | 15 |
| 25      | 5  |
| (?) 100 | 20 |

# 1. Zuordnung – Relation - Zuordnungstabelle

Besteht zwischen den Objekten zweier Bereiche (z. B. in Spalten einer Tabelle dargestellt) ein inhaltlicher Zusammenhang (Verbindung), so nennen wir diesen nicht nur in der Mathematik eine **Zuordnung** (**Relation**).

Beispiele:

- Geldwert in € → Geldwert in GBP
- Deutsche Vokabel → französische Vokabel
- Alter einer Person → Körpergröße
- Person → Fingerabdruck

Der Pfeil (**Zuordnungspfeil**) bringt zum Ausdruck, dass es eine Regel oder Vorschrift gibt, die beschreibt, welche Objekte einander zugeordnet werden. Will man diesen Zusammenhang für jedes Objekt einzeln mitteilen, so kann man das z. B. mit Hilfe einer Tabelle (**Zuordnungstabelle**) vornehmen. Neben dem Ausgangsobjekt in der linken Spalte steht dann das jeweils zugeordnete Objekt (oder zugeordnete Objekte) in der rechten Spalte. Den Ausgangsbereich (die Ausgangsmenge) aller möglichen Objekte für die diese Vorschrift gilt, nennt man **Definitionsbereich**, die Zielmenge **Wertebereich**.

In der Mathematik lassen sich zugeordnete Werte aber auch oft mittels einer Zuordnungsvorschrift berechnen und/oder in einem Diagramm anschaulich darstellen.

# 1.1. Darstellungsmöglichkeiten

- **Zuordnungsbeschreibung**

Alter einer Person → Körpergröße

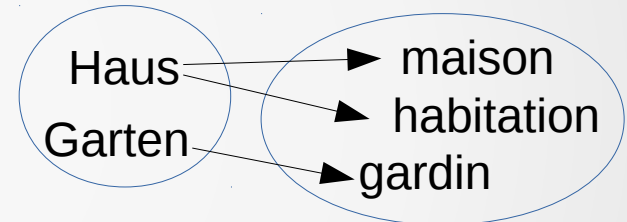
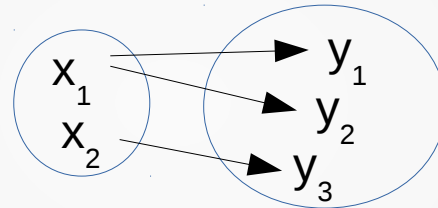
- **Wertetabelle**

(nur einzelne Werte, aber dafür genau)

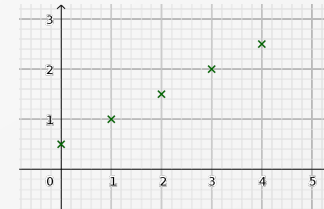
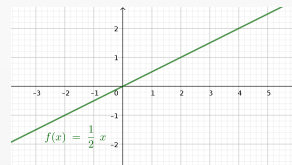
|   |   |    |    |     |
|---|---|----|----|-----|
| x | 1 | 5  | 10 | 50  |
| y | 4 | 20 | 40 | 200 |

- **Vennndiagramm**

(Bei nur wenigen Objekten)



- **Koordinatensystem (Graph, Balken, Punkte);**  
(anschaulich, alle Werte im Überblick, aber nicht genau ablesbar. Wenn alle Zwischenwerte existieren Graph, sonst nur einzelne Punkte oder Balkendiagramm)



- **Zuordnungsvorschrift (Term)** z. B.:  $x \rightarrow x^2$

(Auf den ersten Blick keine Angaben, aber diese sind immer berechenbar.)

- **Zuordnungsgleichung** z.B.:  $f(x) = x^2$ ;  $y(x) = x^2$

(Auf den ersten Blick keine Angaben, aber diese sind immer berechenbar.)

## 1.2. Eindeutigkeit

Eine Zuordnung ist eindeutig, wenn jedem Objekt der Definitionsmenge nicht mehr als ein Objekt der Wertemenge zugeordnet wird.

Das Beispiel Vokabeln ist keine eindeutige Zuordnung:

Haus → maison, habitation

Das Beispiel Körpergröße ist nur dann eindeutig, wenn ich hinreichend genaue Bedingungen formuliere (z.B. Mittelwert eines Jahres).

Der Fingerabdruck einer Person ist eindeutig, obwohl es vielleicht auch Personen mit dem gleichen Fingerabdruck gibt. Die Zuordnung  
Fingerabdruck → Person (Umkehrabbildung) ist also vmtl. nicht eindeutig.

Eine eindeutige Zuordnung nennt man **Funktion**.

## 1.3. Die algebraische Schreibweise

- Meist kann man bei Funktionen eine Zuordnungsvorschrift mit Hilfe eines Terms angeben
- Den einer bestimmten Zahl **zugeordneten Wert** bestimmen wir dann mittels Einsetzung der Zahl in den Term an Stelle der Variablen und anschließender Berechnung.  
Term:  $x^2+3x+2$ ;  $x=2 \rightarrow 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12$
- Die berechneten Werte nennen wir y-Werte. Im Beispiel wird dem **x-Wert 2** der **y-Wert 12** zugeordnet (  $2 \rightarrow 12$  ).
- Der zu bestimmende **y-Wert** verändert sich je nach vorgegebenen **x-Wert**, d. h. der **y-Wert** hängt von der Größe des **x-Wertes** ab. Das schreiben wir mit dem Symbol **y(x)** [lies:“y von x“]
- Das schreibt man nun in Form einer Gleichung:

$$\text{z.B. : } y(x) = x^2+3x+2$$

## 1.4. Rechnen mit Funktionsgleichungen

Wenn wir für die Variable Zahlen einsetzen, können wir mit diesen Gleichungen rechnen:

Beispiel:  $y(x) = -6x - 5$

1) y-Werte bestimmen:

$$y(3) = -6 * 3 - 5 = -18 - 5 = -23$$

2) Zu einem vorgegebenen y-Wert den zugehörigen x-Wert suchen:

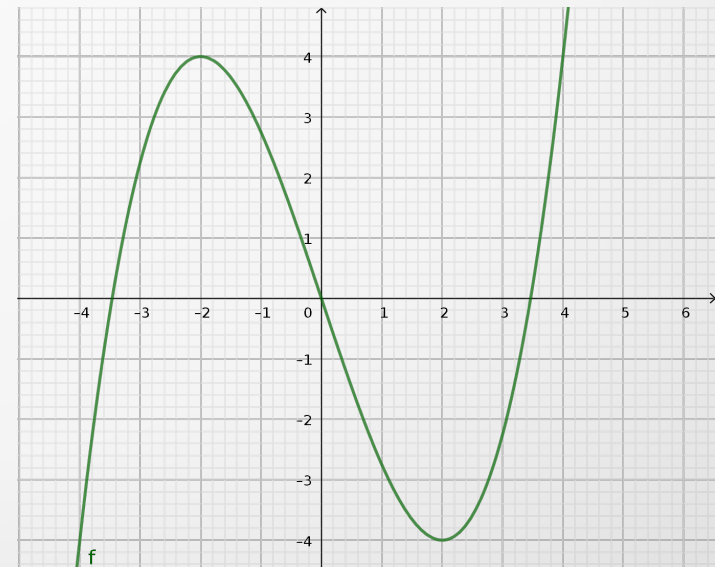
$$\begin{array}{rcll} y(x) = 7; & y(x) = -6x - 5 = 7 & | +5 \\ & -6x = 12 & | : (-6) \\ & x = -2 & \end{array}$$

# 1.5. Graphische Darstellung

- Zur graphischen Darstellung zeichnet man die x/y-Paare als Punkte  $P(x|y)$  im Koordinatensystem. Wenn wir diese Punkte verbinden dürfen, erhalten wir einen Graphen.
- Zu Anfang bestimmen wir eine geeignete Menge solcher Paare in einer Wertetabelle.
- Nach Einzeichnung dieser Punkte in das Koordinatensystem überlegen wir uns, ob und wie wir diese Punkte verbinden können.

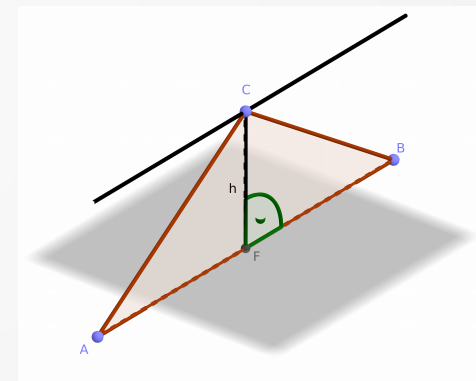
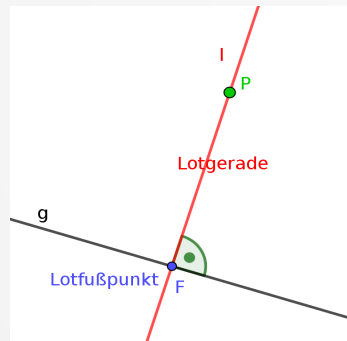
Beispiel:  $y(x) = 0,25 x^3 - 3 x$

|    |      |    |      |   |       |    |       |   |
|----|------|----|------|---|-------|----|-------|---|
| -4 | -3   | -2 | -1   | 0 | 1     | 2  | 3     | 4 |
| -4 | 2,25 | 4  | 2,75 | 0 | -2,75 | -4 | -2,25 | 4 |



## 2. Geometrie

- Eine gerade Linie,
  1. die durch einen Punkt (P) geht und
  2. die auf einer gegebenen Gerade (g) oder einer Ebene senkrecht steht,nennen wir ein **Lot** oder auch **Lotgerade** (l). Den Schnittpunkt von Lot und dieser Geraden nennen wir den **Lotfußpunkt**.



- Fällt man das Lot von einer Ecke einer Figur auf die gegenüberliegende Seite, so nennen wir die Strecke zwischen der Ecke und dem Lotfußpunkt **Höhe**.

## 2. 1. Flächeninhalte von Dreiecken und Vielecken

Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus der Hälfte des Produktes der Grundseite mit der zugeordneten Höhe.

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} g h$$

- 1) Es gibt drei Möglichkeiten für die Auswahl der Grundseite
- 2) Zu einer ausgewählten Grundseite gehört nur eine Höhe.

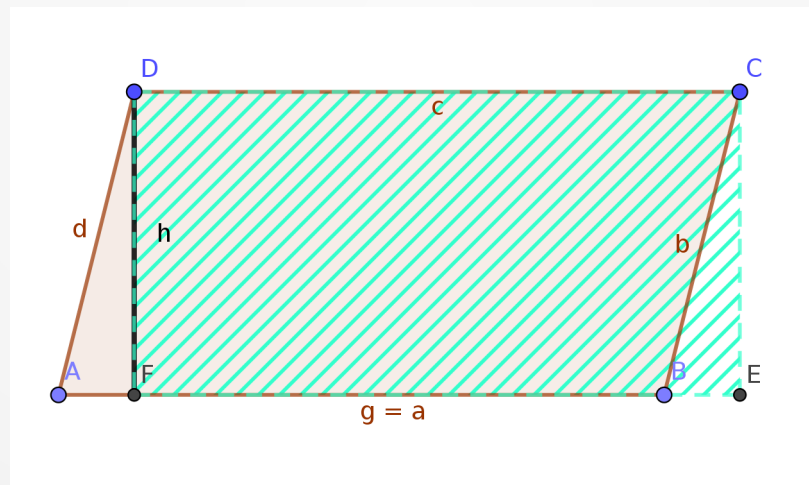
Den Flächeninhalt von Vielecken berechnen wir, indem wir die Vielecke in Dreiecke zerlegen und alle ermittelten Flächeninhalte addieren.

**Achtung: Die Maßeinheiten von g und h müssen gleich sein!**

## 2. 2. Flächeninhalte von Parallelogrammen

Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes berechnet sich aus dem Produkt der Grundseite mit der zugeordneten Höhe

$$A_{\text{P}} = g \cdot h$$



# 3. Bruchrechnung

Idee der Bruchrechnung:

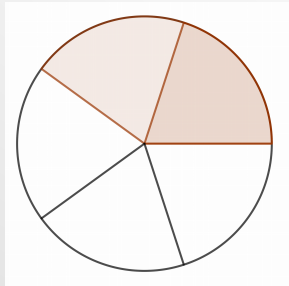
Zerlegt man ein Ganzes in  $b$  gleichgroße Teile und nimmt man  $a$  Teile davon so schreibt man dies mit dem Symbol:

$$\frac{a}{b}$$

$a$  nennen wir Zähler, weil diese Zahl angibt (zählt), wie viele Teile wir letztlich genommen haben

$b$  nennen wir Nenner. Er benennt unsere ursprüngliche Einteilung des Ganzen (Zerlegung, Bruchklasse).

Beispiel:

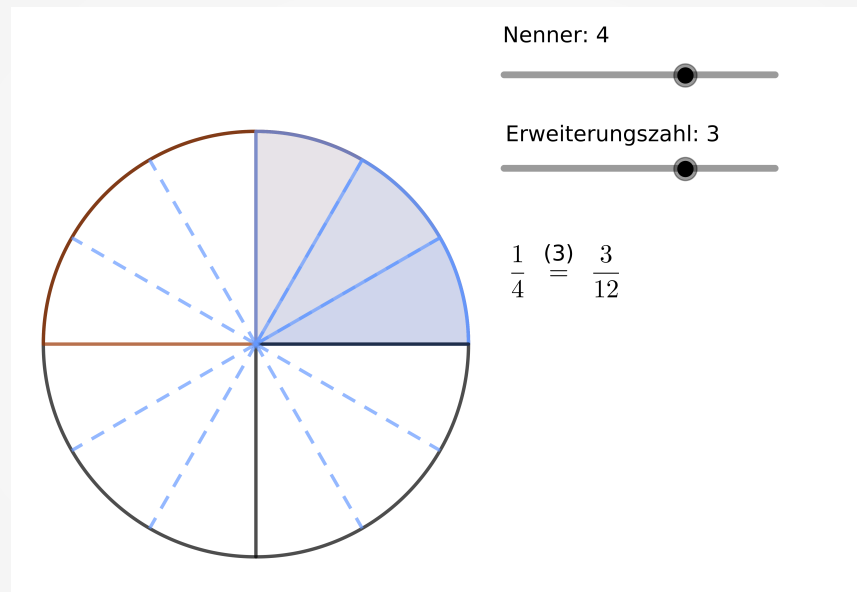


$$\frac{2}{5}$$

„2 von 5“, zwei Fünftel

## 3.1. Erweitern - Kürzen

Nun zerlegen wir jeden Teil wiederum in gleich große und gleich viele weitere Teile.



Im Bild wurde jedes Viertel noch einmal in drei weitere Teile geteilt. Damit erhalten wir zwölf gleich große Teile. Jedes geteilte Teil ist  $\frac{1}{12}$  des Ganzen und damit ist  $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ .

Diesen Vorgang nennen wir in der Bruchrechnung **Erweitern**.

## 3.2. Prozentrechnung – Absoluter und relativer Vergleich

Vergleichen wir die Ergebnisse einer Schulsprecherwahl:

| Klasse | Schülerzahl | Ja-Stimmen |
|--------|-------------|------------|
| 7a     | 20          | 15         |
| 7b     | 24          | 18         |
| 7c     | 24          | 17         |

Wo hat das Schülersprecherteam am Schlechtesten abgeschnitten?

- In der Klasse 7a gab es die wenigsten Ja-Stimmen. Wir orientieren uns hier nur an der Anzahl der Ja-Stimmen. Diese Vorgehensweise nennen wir **Absoluter Vergleich**.
- Das ist ja auch nicht so erstaunlich, denn dort gab es ja auch die wenigsten Schüler. Also versuchen wir beim Vergleich auch die Größe der Klasse zu berücksichtigen. Wo gab es den geringsten Anteil von Ja-Stimmen.

7a: 15 von 20 Schülern sind  $15/20 = \frac{3}{4}$  der Schüler =  $75/100 = 0,75$

7b: 18 von 24 Schülern sind  $18/24 = \frac{3}{4}$  der Schüler =  $75/100 = 0,75$

7c: 17 von 24 Schülern sind  $17/24 = ?$  der Schüler;  $17:24 = 0,708\bar{3} = 70,8\bar{3} \%$

Berücksichtigt man auch die Klassengrößen, so war das Team in der Klasse 7c am Unbeliebtesten. Ein solches Vorgehen nennen wir **Relativer Vergleich**.

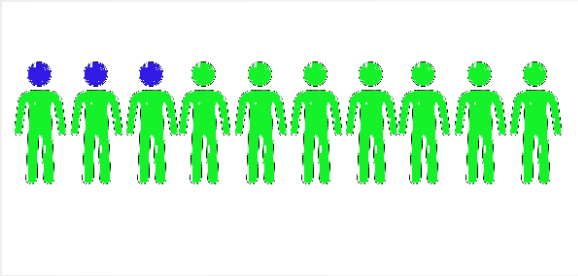
### 3.3. Der Prozentbegriff

Wie wir gerade gesehen haben, bietet es sich beim relativen Vergleich an, immer auf eine Bezugsgröße von 100 umzurechnen. So lassen sich die Dezimalbrüche (ein Zehntel, ein Hundertstel,...) in unserem Dezimalsystem einfach auch als Dezimalzahlen darstellen. „Bezogen auf Hundert“ heißt lateinisch „pro centum“ und daher stammt unser Begriff „**Prozent**“. So schreiben wir statt  $23/100$  einfach  $23\%$  oder als Gleichung für eine beliebige Zahl  $p$ :

$$\frac{p}{100} = p\% \quad \text{oder} \quad p\% = \frac{p}{100}$$

$p$  nennen wir den **Prozentsatz**.

## 3.4. Veranschaulichung des Prozentbegriffes



=



$$\frac{3}{10}$$

<sup>(10)</sup>  
=

$$\frac{30}{100}$$

=

30 %

## 3.5. Bestimmung des Prozentsatzes

- Die Anteilsbrüche lassen sich mittels Erweitern oder Kürzen auf den Nenner 100 bringen.

Beispiel 1: 15 von 75 Schülern erhalten eine Ehrenurkunde.

$$p\% = \frac{15}{75} \stackrel{(3)}{=} \frac{5}{25} \stackrel{(4)}{=} \frac{20}{100} = 20\%$$

- Division des Zählers durch den Nenner.

Beispiel 2: Ein Käseprodukt von 150 g enthält 66,5 g Wasser.

$$p\% = \frac{66,5}{150} = 66,5 : 150 = 44 \frac{1}{3}\% = 44, \bar{3}\%$$

$$\text{NR.: } 66,5 : 150 = 0,44 \text{ Rest } \frac{50}{100} = 44 \frac{1}{3}\% \quad \text{Rest: } \frac{\frac{50}{100}}{150} = \frac{50}{15000} = \frac{1}{300} = 1/3\%$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ 650 \\ \underline{600} \\ 50 \end{array}$$

Das sind 50 Hundertstel als Rest.

## 3.6. Begriffe und Berechnung des Prozentsatzes

- Die Größe, die den Teil vom Ganzen angibt, nennen wir in der Prozentrechnung **Prozentwert (W)**.
- Die Größe, die das Ganze angibt, nennen wir in der Prozentrechnung **Grundwert (G)**.
- $p\%$  nennen wir **Prozentsatz**.

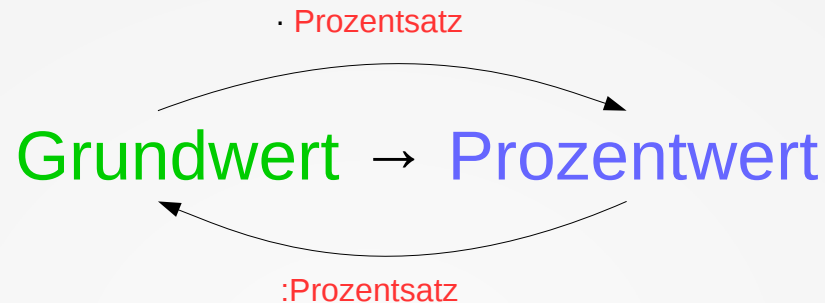
Bisher:  **$p\%$  = Prozentwert/Grundwert**

## 3.7. Bestimmung des Prozentwertes

- $\cdot$  Anteil  
Ganzes  $\rightarrow$  Teil des Ganzen *Beispiel:*  $\frac{1}{2} \cdot 500 = 250$
- $\cdot$  Prozentsatz  
Grundwert  $\rightarrow$  Prozentwert *Beispiel:*  $50\% \cdot 500 = \frac{50}{100} \cdot 500 = 250$

$$\text{Prozentwert} = \text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert}$$

## 3.8. Bestimmung des Grundwertes



$$\text{Prozentwert} : \text{Prozentsatz} = \text{Grundwert}$$

$$\text{Beispiel: } 250 : 50\% = \frac{250}{\frac{50}{100}} = 500$$

## 3.9. Prozentrechnung - Formeln

$$\text{Prozentwert} = \text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert}$$

$$\text{Prozentsatz} = \text{Prozentwert} / \text{Grundwert}$$

$$\text{Grundwert} = \text{Prozentwert} / \text{Prozentsatz}$$

## 3.10. Beispiele

- 1) Der menschliche Körper besteht zu ca. 60% seines Gewichtes aus Wasser. Soren wiegt 45 kg.

$$W = 60\% \cdot 45 = \frac{60}{100} \cdot 45 = \frac{3}{5} \cdot 45 = 27$$

Sein Körper enthält 27 kg Wasser.

- 2) 1 l Milch (1,032 kg) enthält 36,12 g Fett (Achtung: Unterschiedliche Einheiten).

$$36,12 : 1032 = 0,035$$

$$\begin{array}{r} 3096 \\ 5160 \\ \underline{5160} \\ 0 \end{array}$$

Der Fettgehalt beträgt 3,5 %

## 3.11. Zinsrechnung

| Prozentrechnung | Zinsrechnung |
|-----------------|--------------|
| Grundwert       | Kapital      |
| Prozentwert     | Zinsen       |
| Prozentsatz     | Zinssatz     |

## 3.12. Zinsrechnung - Formeln

$$\text{Zinsen} = \text{Zinssatz} \cdot \text{Kapital}$$

$$\text{Zinssatz} = \text{Zinsen} / \text{Kapital}$$

$$\text{Kapital} = \text{Zinsen} / \text{Zinssatz}$$

## 3.13. Zeitzinsrechnung

- In der Regel beziehen sich Zinsangaben auf ein Kalenderjahr.
- Gibt es davon abweichende Zeiträume, für die Zinsen gezahlt werden sollen, dann wird dieser Anteil als Faktor berücksichtigt.
- Ein Zinsjahr wird meist mit 360 Tagen und ein Zinsmonat mit 30 Tagen gerechnet.

Beispiel 1: 2% Zinssatz; 5000 € Kapital;  $\frac{1}{2}$  Jahr Laufzeit

$$Z = 0,5 \cdot 2/100 \cdot 5000 \text{ €} = 50 \text{ €}$$

Beispiel 2: 2% Zinssatz; 9000 € Kapital; 20 Tage Laufzeit

$$Z = 20/360 \cdot 2/100 \cdot 9000 \text{ €} = 1/18 \cdot 2/100 \cdot 9000 \text{ €} = 10 \text{ €}$$

## 3.14. Veränderte Grundwerte - Wachstumsfaktoren

- Bei einer Erhöhung eines Grundwertes um  $p\%$  kann der erhöhte Grundwert direkt mittels des Wachstumsfaktors

$$q = 1 + p\% = 1 + p/100$$

berechnet werden.

- Bei einer Verringerung eines Grundwertes um  $p\%$  kann der verringerte Grundwert direkt mittels des Abnahmefaktors

$$q = 1 - p\% = 1 - p/100$$

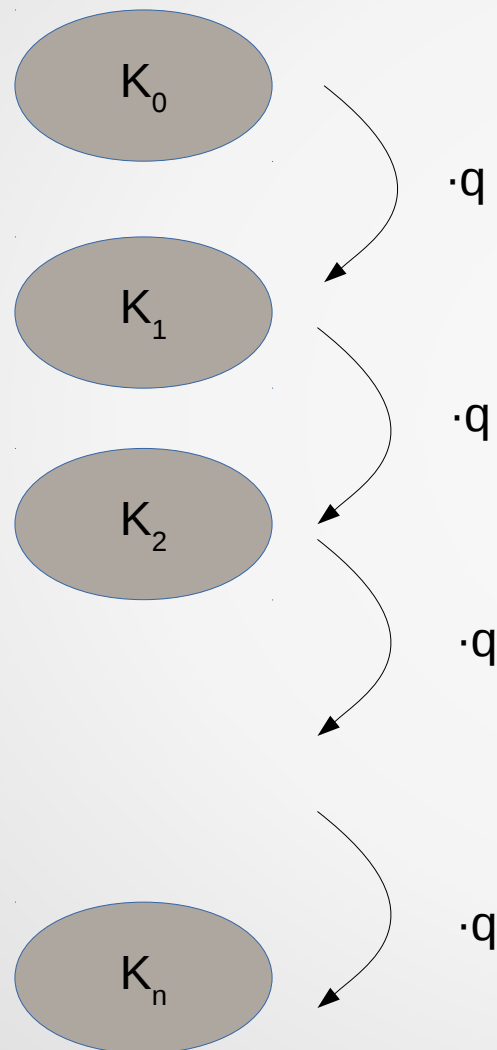
berechnet werden.

Beispiel:

12,5 kg Kartoffeln der Sorte Linda kosten ohne Mehrwertsteuer (7%) 17,40 €.

Mit Mwst. kosten sie dann:  $17,40\text{€} \cdot 1,07 = 18,62 \text{ €}$ .

## 3.15. Zinseszinsrechnung - Formel



$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot (1 + p)^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## 4. Terme

Eine Zeichenkette, die aus Zahlen, Buchstaben, Rechenzeichen und Klammern besteht, nennen wir einen **Term**, wenn dieser Ausdruck nach Ersetzen der Buchstaben durch Zahlen berechenbar ist.

Term:  $a+2b-c$ ;  $a^2-4b$ ;  $(a-b)^3-2$ ;

Kein Term:  $)7-3($  oder  $4-+5a$

Die Buchstaben nennen wir **Variable** (Veränderliche), weil sie unterschiedliche Zahlenwerte annehmen können. Kommt eine Variable mehrfach in einem Term vor, so muss immer dieselbe Zahl eingesetzt werden.

| a | b | c | $a+2ab-3bc$                                         |
|---|---|---|-----------------------------------------------------|
| 4 | 5 | 6 | $4+2 \cdot 4 \cdot 5-3 \cdot 5 \cdot 6=4+40-90=-46$ |

## 4.1 Termbezeichnungen - Beispiele

$$4+5$$

Summe

$$4+5\cdot 4$$

Summe von  
einer Zahl mit  
einem Produkt

$$4\cdot 5$$

Produkt

$$4 \cdot (5+4)$$

Produkt von  
einer Zahl mit  
einer Summe

Der **Typ eines Terms** richtet sich nach der Rechnung, die als letztes ausgeführt wird.

## 4.2. Vorrangregeln

- Grundsätzlich wird von links nach rechts gerechnet.
- Punkt- vor Strichrechnung
- Rechenarten der zweiten Stufe (Potenzrechnung) vor denen der ersten Stufe
- Klammern werden von innen nach außen ausgerechnet.

Wenn sich bei zwei Termen bei jeder möglichen Einsetzung immer dasselbe Ergebnis ergibt, so nennen wir diese zwei Terme **wertgleich**. Dann kann der erste Term mittels einer **Termumformung** in den zweiten Term überführt werden.

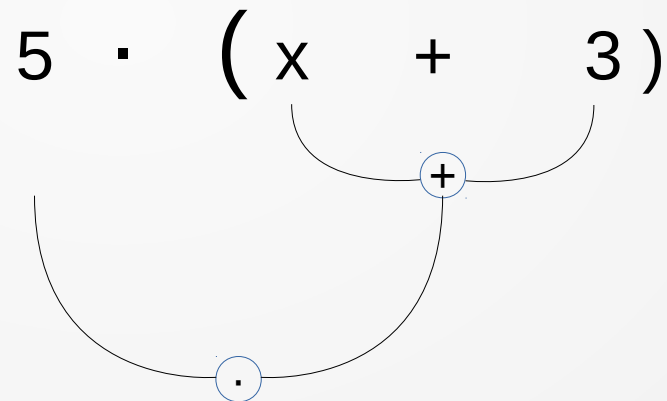
Wir addieren und subtrahieren gleichartige Variablenprodukte, indem wir ihre Anzahl zählen.

Beispiel:  $7x + 3xy - 5x - 2xy = 2x + xy$

## 4.3. Rechenbäume

Die Reihenfolge und die Termbezeichnungen lassen sich mit Hilfe von Rechenbäumen schematisch darstellen. Die zuletzt ausgeführte Rechnung bestimmt den Termart.

$$5 \cdot (x+3)$$



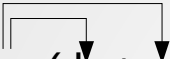
Der Term ist ein Produkt

## 4.4. Zusammenfassen von Termen (Addition und Subtraktion)

- Ein Variablenprodukt nennen wir **gleichartig**, wenn dort dieselben Variablen vorkommen und die dort vorkommenden Variablen alle dieselbe Hochzahl besitzen. Diese Produkte unterscheiden sich nur im Zahlenfaktor.
- Das Produktergebnis (verrechnete Anzahlen) schreiben wir geordnet, zuerst den Zahlenfaktor und dann die Variablen in alphabetischer Reihenfolge mit den entsprechenden Hochzahlen (Exponenten, Vielfachheiten).
- Malpunkte dürfen weggelassen werden, wenn keine Missverständnisse möglich sind (z. B.:  $3ab$ ;  $2(x+y)$ ).

## 4.5. Auflösen von Klammern (Distributivgesetz)

- Für das Auflösen von Klammern gilt das **Distributivgesetz**:


$$a (b + c) = ab + ac \quad \text{bzw.} \quad a (b - c) = ab - ac$$

Man multipliziert jeden Summand in der Klammer mit dem Faktor vor der Klammer.

- Die Vorzeichen (+,−) ergeben sich aus den Vorzeichenregeln der Multiplikation.

$$\text{z. B.: } -4 (x - 3y + 4z) = -4x + 12y - 16z$$

- Ein Minuszeichen vor der Klammer hat dieselbe Wirkung wie eine Multiplikation mit −1:


$$-(a + b - c) = (-1)(a + b - c) = -a - b + c$$

Merkregel: Bei einer **Minusklammer** drehen sich alle Vor-/Rechenzeichen **in der Klammer** um.

## 4.6. Faktorisierung von Summen (Distributivgesetz)

- Für das Faktorisieren von Summen gilt das **Distributivgesetz rückwärts**:

$$ab + ac = a (b + c) \quad \text{bzw.} \quad ab - ac = a (b - c)$$

Man sucht in der Summe alle gemeinsamen Faktoren, klammert diese aus (schreibt diese vor eine Klammer), dividiert jeden Summand durch den Faktor und schreibt das Ergebnis in die Klammer.

Beispiel:  $6a^2b + 4a^3c - 2a^2 = 2a^2 (3b + 2ac - 1)$

- Auch der Faktor (-1) lässt sich ausklammern

Beispiel:  $-a - b = -(a + b)$

- Gemeinsame Faktoren können auch Klammern sein.

Beispiel:  $4x (y + z) - 8 (y + z) = 4 (y + z) (x - 2)$

## 4.7. Binomische Formeln

1. Binomische Formel:

$$(\textcolor{red}{a} + \textcolor{green}{b})^2 = (\textcolor{red}{a} + \textcolor{green}{b})(\textcolor{red}{a} + \textcolor{green}{b}) = \textcolor{red}{a}^2 + \textcolor{green}{2ab} + \textcolor{green}{b}^2$$

2. Binomische Formel:

$$(\textcolor{red}{a} - \textcolor{green}{b})^2 = (\textcolor{red}{a} - \textcolor{green}{b})(\textcolor{red}{a} - \textcolor{green}{b}) = \textcolor{red}{a}^2 - \textcolor{green}{2ab} + \textcolor{green}{b}^2$$

3. Binomische Formel:

$$(\textcolor{red}{a} + \textcolor{green}{b})(\textcolor{red}{a} - \textcolor{green}{b}) = \textcolor{red}{a}^2 - \textcolor{green}{b}^2$$

## 4.8. Beispiele - Binomische Formeln in Termen

Bei umfangreicheren Termen werden, wenn möglich, zuerst die Potenzen (mit Hilfe einer binomischen Formel), dann die Produkte (mit Hilfe einer der 3. bin. Formel oder dem (doppelten) Distributivgesetz) ausgerechnet und danach die gleichartigen Summanden zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (2a + b)^2 + (a + 2b)^2 &= 4a^2 + 4ab + b^2 + a^2 + 4ab + 4b^2 \\ &= 5a^2 + 8ab + 5b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (x + y)^2 - (x + y)(x - y) &= x^2 + 2xy + y^2 - [x^2 - y^2] \\ &= 2xy + y^2 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad (x + y)^2 (x - y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x - y)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - x^2y + 2x^2y - 2xy^2 + xy^2 - y^3 \\ &= x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

## 4.9. Zu einer binomischen Formel ergänzen

1) Der 2. quadratische Ausdruck fehlt

1. binomische Formel

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

$a^2$  is decomposed into  $a \cdot a$  (indicated by a red arrow labeled  $\ominus^2$  pointing to  $a$  and a red arrow labeled  $\ominus^2$  pointing to  $a$ ).

$2ab$  is decomposed into  $a \cdot b + b \cdot a$  (indicated by a red arrow labeled  $\ominus^2$  pointing to  $a$  and a red arrow labeled  $\ominus^2$  pointing to  $b$ ).

$b^2$  is decomposed into  $b \cdot b$  (indicated by a green arrow labeled  $\ominus^2$  pointing to  $b$  and a green arrow labeled  $\ominus^2$  pointing to  $b$ ).

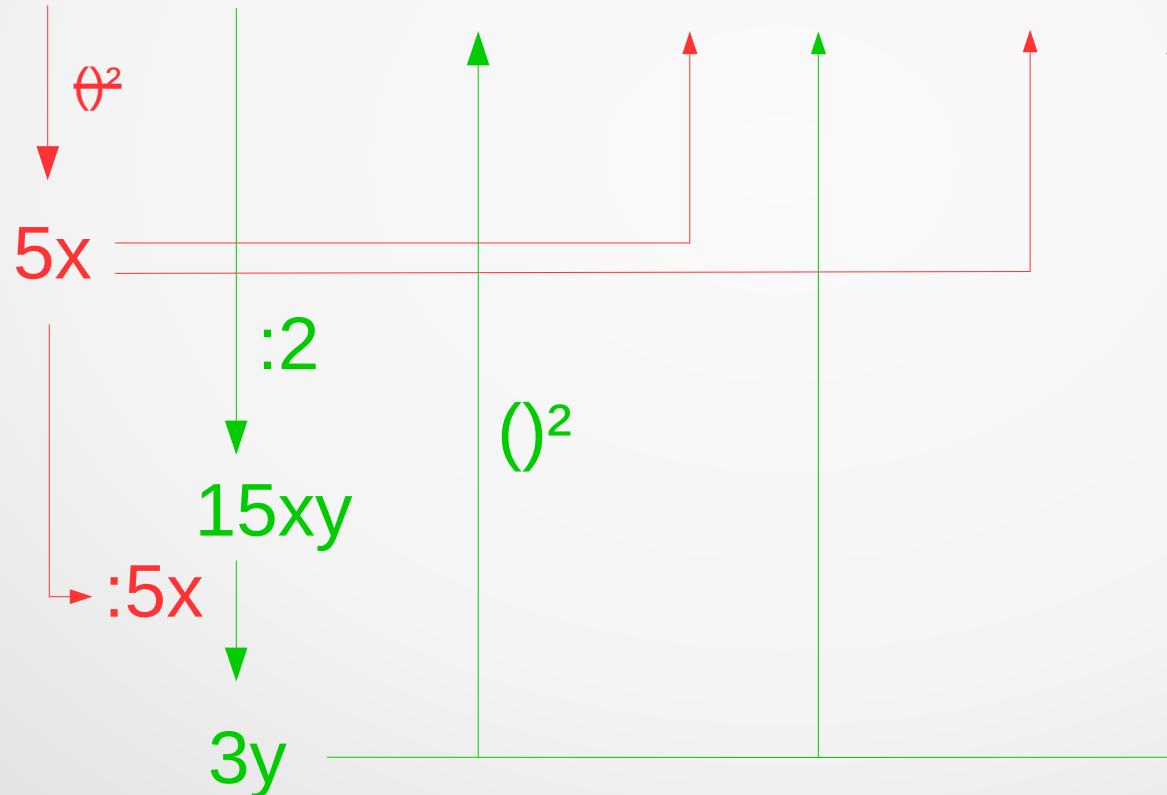
The result is  $a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$ , which is then factored as  $(a + b)(a + b)$ .

# ergänzer

# ergänzer

## 1. binomische Formel

$$25x^2 + 30xy + 9y^2 = (5x + 3y)(5x + 3y)$$



## 5. Lösungen von Gleichungen

- Die Menge der Zahlen, die nach dem Einsetzen in eine Gleichung diese erfüllen (eine wahre Aussage ergeben,) nennen wir Lösung (Lösungsmenge) einer Gleichung ( $L = \{ * ; \dots \}$ )
- Eine Gleichung kann eine (mehrere, keine) Lösung haben, sie kann aber auch für alle Zahlen gültig sein. Dann sagen wir, die Gleichung ist allgemeingültig. Dann sind die Terme auf der linken und rechten Seite einsetzungsgleich.
- Allgemeingültige Gleichungen kennzeichnen wir mit (w), unlösbare Gleichungen mit (f)

# 5.1 Lösungsverfahren für Gleichungen

- Additions-/bzw. Subtraktionsregel

Addiert bzw. subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung denselben Wert, so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

- Multiplikations-/Divisionsregel

Multipliziert (dividiert) man beide Seiten einer Gleichung mit (durch) demselben (denselben) Wert, so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

- Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert, nennen wir Äquivalenzumformungen (mit gleicher Bedeutung).

„ $\Leftrightarrow$ “

# 6.1. Proportionale Zuordnungen

Zuordnungen, die sich nach der Regel „Je mehr, desto mehr“ verhalten (Jedem Vielfachen des x-Wertes wird das Vielfache des y-Wertes zugeordnet), nennen wir **proportional**.

Die Zuordnungsvorschrift für proportionale Zuordnungen lautet

$$x \rightarrow p \cdot x$$

$$y(x) = p \cdot x$$

p nennen wir den **Proportionalitätsfaktor**.

Proportionale Zuordnungen sind **quotientengleich**, d.h. dividiert man bei einem Wertepaar (Punkt P(x|y)) den y-Wert durch den x-Wert, so erhält man immer den Proportionalitätsfaktor p.

$$y/x = p$$

Beispiel:

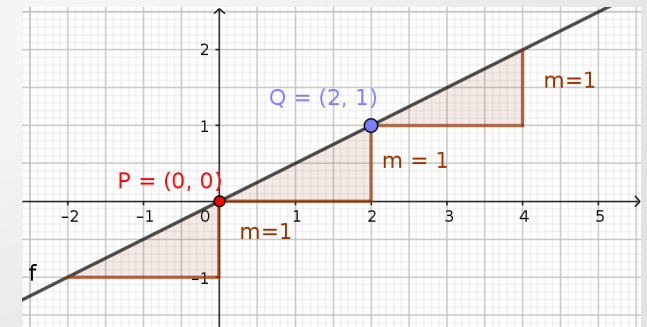
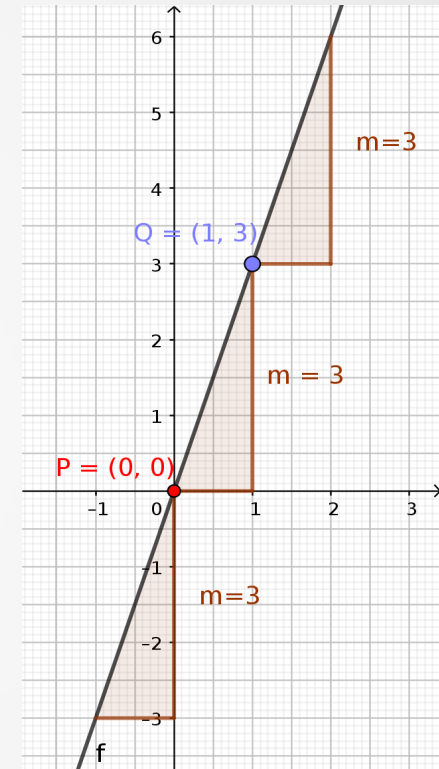
|       |    |    |    |     |
|-------|----|----|----|-----|
| x     | 3  | 5  | 6  | 10  |
| y     | 39 | 65 | 78 | 130 |
| p=y/x | 13 | 13 | 13 | 13  |

$$y(x) = 13 \cdot x$$

## 6.2. Der Graph proportionaler Funktionen

- Der Graph einer proportionalen Funktion  $y(x)=m \cdot x$  geht immer durch den Punkt  $P(0|0)$ .  
 $y(0) = m \cdot 0 = 0$
- Der Graph einer proportionalen Funktion  $y(x)=m \cdot x$  geht immer durch den Punkt  $Q(1|m)$ .  
 $y(1) = m \cdot 1 = m$
- Wenn der x-Wert um **eins** größer wird, erhöht sich der y-Wert um **m**.  
 $y(x+1) = m \cdot (x+1) = m \cdot x + m = y(x) + m$
- Ist m ein Stammbruch ( $1/n$ ), dann erhöht sich der y-Wert, wenn der x-Wert um n größer wird, um 1.  
 $y(x+n) = 1/n \cdot (x+n) = 1/n \cdot x + 1/n \cdot n = 1/n \cdot x + 1 = y(x) + 1$

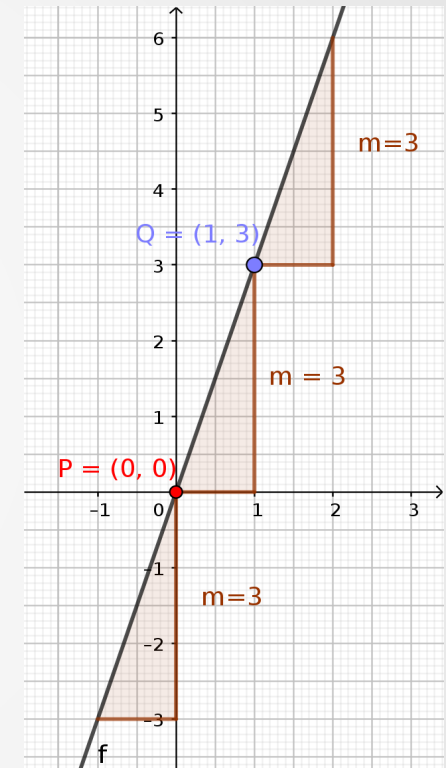
Die **ingezeichneten Dreiecke** nennen wir **Steigungsdreiecke**.



## 6.3. Die Steigung der Geraden

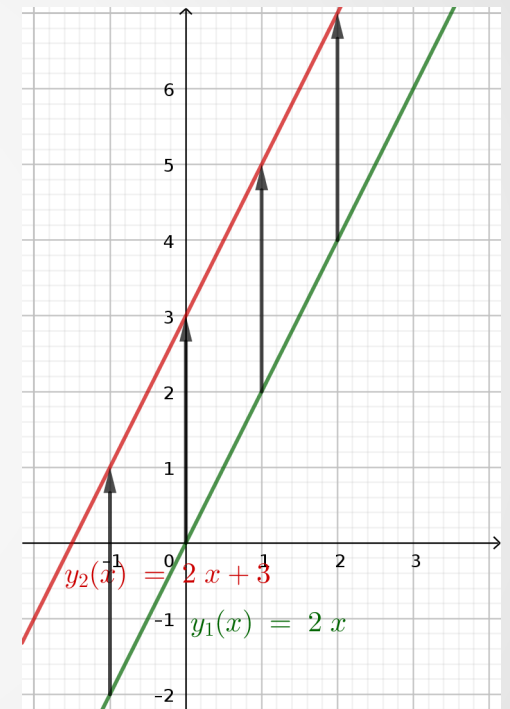
- Da wir gesehen haben, dass die y-Werte immer gleichmäßig um  $m$  größer werden, wenn wir auf der x-Achse um eins nach rechts gehen, nehmen wir dies als Maß für die Steigung der Geraden (**Anstieg pro Einheit**).
- Falls wir den Anstieg auf einer x-Entfernung messen, die ungleich 1 ist, müssen wir diesen Anstieg also durch die gemessene x-Entfernung teilen, um auf den Anstiegswert pro Einheit zu kommen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{Differenzenquotient})$$



# 7. Lineare Funktion

- Eine nach oben bzw. nach unten verschobene proportionale Funktion nennen wir **lineare Funktion**.
- Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet  **$y(x) = mx + b$**
- Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, die die **y-Achse bei b schneidet** (im Punkt  $P(0|b)$ , **y-Achsenabschnitt**) und die Steigung m besitzt.



## 7.1. Berechnung von x-Werten

- Oftmals interessiert, wann ein x-Wert einen vorgegebenen y-Wert erreicht.
- Ist dieser y-Wert gleich 0 ( $y(x)=0$ ), so nennen wir diese Aufgabenstellung „**Bestimmung der Nullstelle**“
- Die **Nullstellen** sind zeichnerisch die **Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse**, denn dort ist der y-Wert gleich 0.
- Zur algebraischen Lösung all dieser Aufgaben benutzen wir den Ansatz:

$$y(x)=mx + b = c; \text{ (c=vorgegebener y-Wert bzw. 0)}$$

und lösen die Gleichung anschließend nach x auf

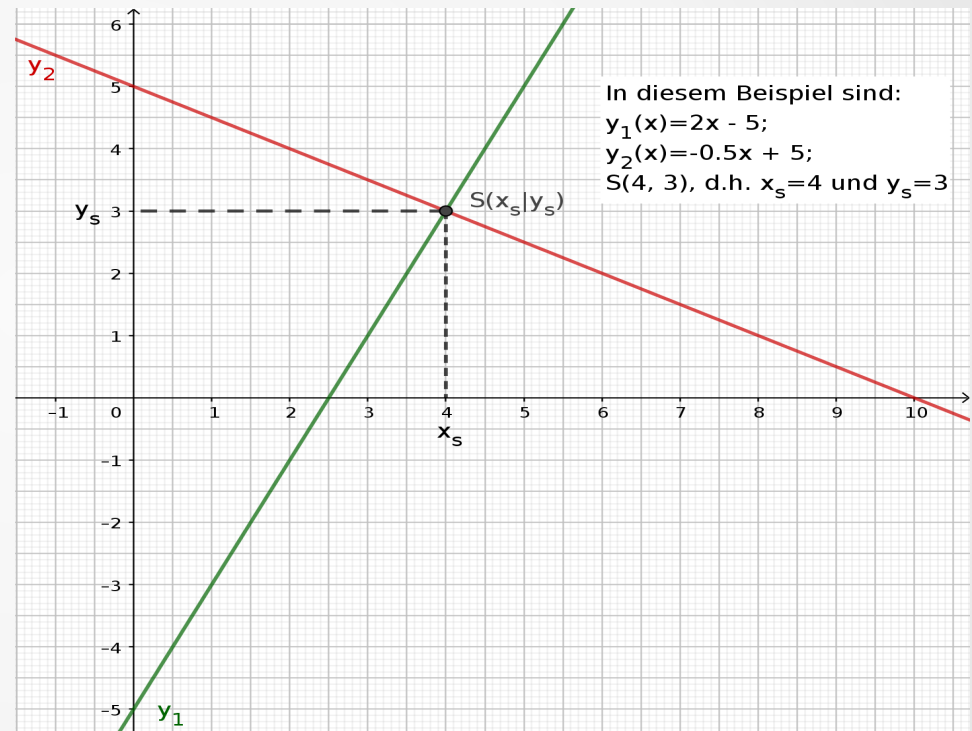
## 7.2. Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden

Für den Schnittpunkt  $S(x_s|y_s)$  gilt,  
dass er auf beiden Geraden liegen  
soll, d. h. wenn ich  $x_s$  in die erste und  
zweite Funktionsgleichung einsetze  
(Punktprobe) ergibt sich der richtige  
y-Wert ( $y_s$ ):  $y_1(x_s)=y_s=y_2(x_s)$

Zur Schnittpunktbestimmung wählen  
wir daher den Ansatz:

$$y_1(x_s)=y_2(x_s)$$

denn dies ergibt eine Gleichung mit  
einer Variablen  $x_s$ , deren Lösung wir  
nach Umformung bestimmen können:



## 7.2. Berechnung des Schnittpunktes - Arbeitsplan

Zur Bestimmung eines Schnittpunktes zweier Geraden

- 1) setze ich die Funktionsgleichungen gleich

$$y_1(x) = y_2(x)$$

- 2) löse dann die Gleichungen nach x auf  
(x-Komponente nach links, Konstante nach rechts)
- 3) und bestimme den y-Wert des Schnittpunktes mittels Einsetzen der x-Lösung in eine Funktionsgleichung.
- 4) Mit der anderen Funktionsgleichung (Einsetzen der x-Lösung) mache ich die Probe.

# 8. Geometrie 2

## 8.1. Winkelbezeichnungen

- 1) Winkel an einer einfachen Geradenkreuzung (zwei sich schneidenden Geraden):

Einen am Scheitelpunkt gegenüberliegenden Winkel nennen wir **Scheitelwinkel** des Winkels (Punktspiegelung). Scheitelwinkel sind gleich groß.

Einen Winkel, der im Winkelfeld daneben liegt, nennen wir **Nebenwinkel**.

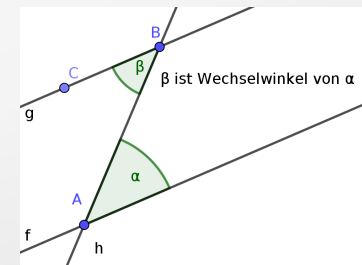
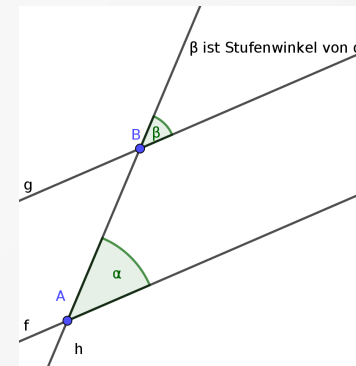
Der **Nebenwinkel ergänzt den Ausgangswinkel zu  $180^\circ$** .

- 2) Winkel bei einer Geraden und zwei diese schneidenden parallelen Geraden

Einen Winkel, der in Bezug zu einem Ausgangswinkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden und auf der entsprechenden Seite der zweiten parallelen Gerade anliegt, nennen wir **Stufenwinkel**.

Den Scheitelwinkel des Stufenwinkels nennen wir **Wechselwinkel**.

**Stufen- und Wechselwinkel sind so groß wie der Ausgangswinkel.**

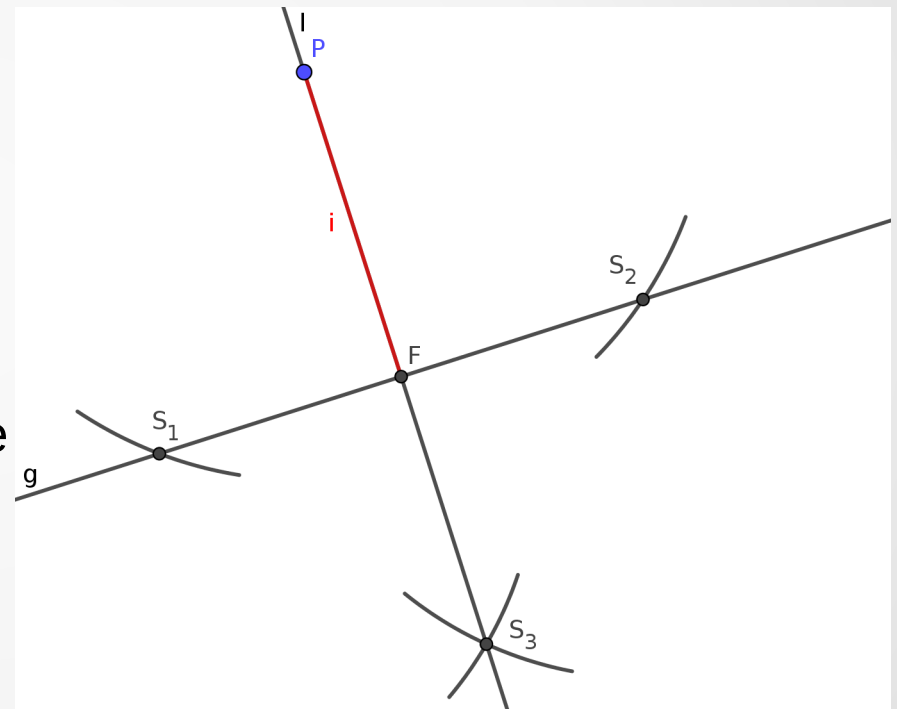


## 8.2. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

- Geometrische Konstruktionen bei denen keine Längen und Winkelgrößen zur Konstruktion herangezogen werden, nennen wir Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.
- Dies ist die Art und Weise, wie die großen griechischen Geometer
  - Thales von Milet (624/623 – 548/544 v. Chr.)
  - Pythagoras (570-510 v. Chr.),
  - Archimedes (287 - 212 v. Chr.),geometrische Zeichnungen nur mit Hilfe einer Schnur angefertigt haben.

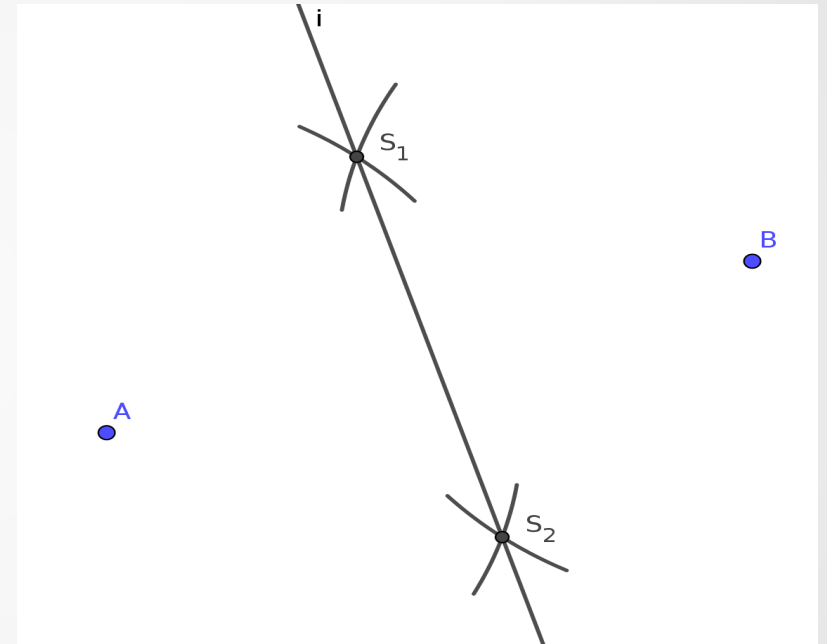
## 8.2.1. Höhen

- Gegeben ist ein Punkt  $P$  und eine Gerade  $g$ .
- Schlage um den Punkt  $P$  einen Kreis mit einem Radius, der größer ist als der Abstand des Punktes von der Geraden.
- Es ergeben sich zwei Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$ .
- Schlage um diese Schnittpunkte jeweils einen Kreis mit festem Radius, der größer ist als der Abstand der beiden Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$ .
- Die beiden Kreise schneiden sich im Schnittpunkt  $S_3$ .
- Die Gerade durch  $S_3$  und  $P$  ist die Lotgerade und die Strecke von  $P$  zum Lotfußpunkt  $F$  ( $\overline{PF}$ ) ist die Höhe.



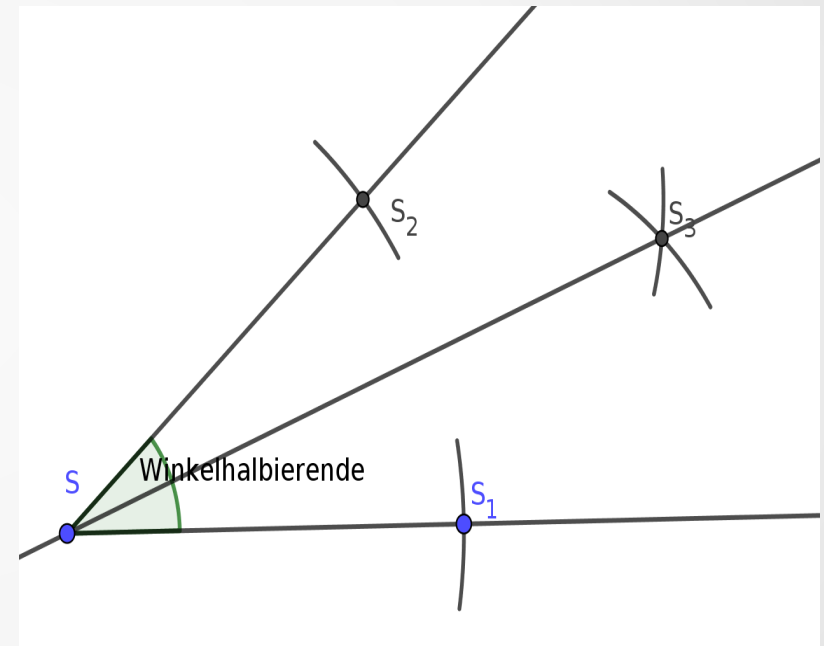
## 8.2.2. Mittelsenkrechte

- Gegeben sind zwei Punkte A und B.
- Schlage um die Punkte A und B je einen Kreis mit gleichem Radius, der größer ist als die Hälfte des Abstandes der beiden Punkte.
- Es ergeben sich zwei Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$ .
- Die beiden Kreise schneiden sich im Schnittpunkt  $S_3$ .
- Die Gerade durch  $S_1$  und  $S_2$  ist die Mittelsenkrechte.



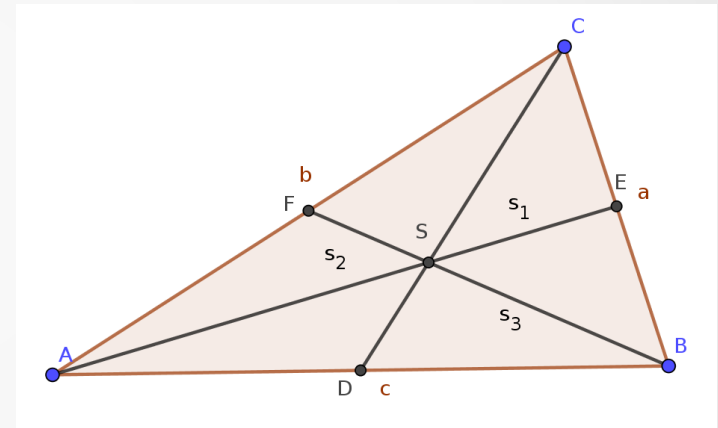
## 8.2.3. Winkelhalbierende

- Gegeben ist ein Winkel mit Scheitelpunkt  $S$ .
- Schlage um den Punkt  $S$  einen Kreis.
- Es ergeben sich zwei Schnittpunkte mit den Schenkeln  $S_1$  und  $S_2$ .
- Schlage um diese Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  je einen Kreis mit gleichem Radius, der größer ist als die Hälfte des Abstandes der beiden Punkte.
- Die beiden Kreise schneiden sich im Schnittpunkt  $S_3$ .
- Die Gerade durch  $S$  und  $S_3$  ist die Winkelhalbierende.



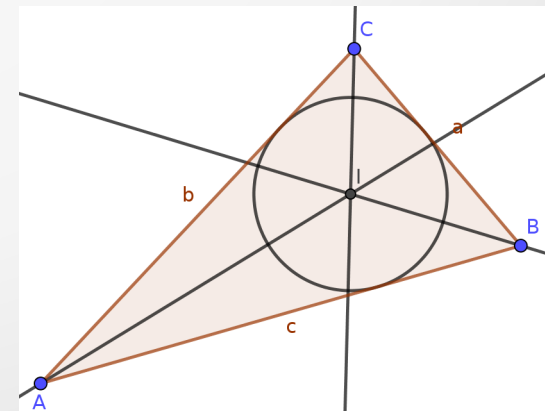
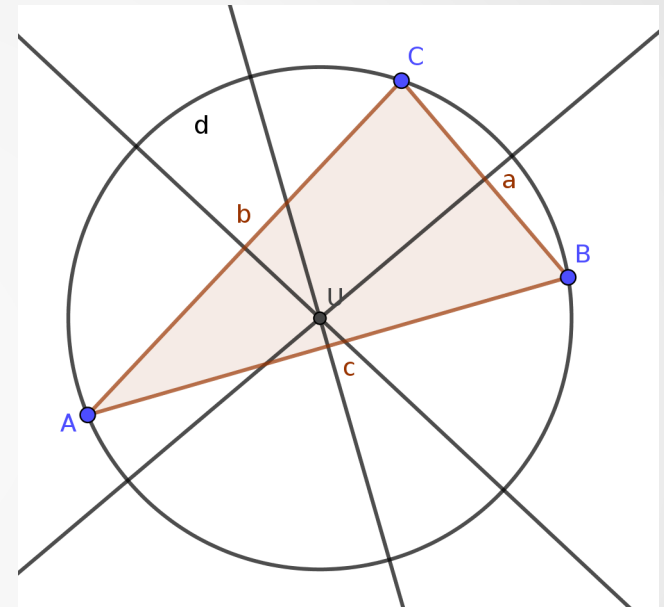
## 8.2.4. Seitenhalbierende und Schwerpunkt

- Die Strecke, die jeweils einen Seitenmittelpunkt eines Dreiecks mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbindet, nennen wir **Seitenhalbierende**.
- Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S. Dieser Punkt ist der **Schwerpunkt**.
- Unterstützt man ein Dreieck in diesem Punkt, so befindet es sich im Gleichgewichtszustand.



## 8.2.5. Eigenschaften der Linien und Schnittpunkte

- Auf der Mittelsenkrechten von den Punkten A und B liegen alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind. Damit ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten in einem Dreieck, der Mittelpunkt des Umkreises.
- Auf der Winkelhalbierenden eines Winkels liegen alle Punkte, die von den Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt sind. Damit ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in einem Dreieck, der Mittelpunkt des Inkreises. Dies ist der Punkt mit größtmöglichen Abstand zu den Seiten.
- Erinnerung: Den Abstand Punkt – Gerade bestimmen wir mit Hilfe des Lotes.



# 8.2.6. Thaleskreis

Vorgegeben sind zwei beliebige Punkte A und B

Schlage um den Mittelpunkt dieser beiden Punkte einen Halbkreis.

**Für jeden Punkt C auf dem Kreisrand gilt: Das Dreieck  $\triangle ABC$  besitzt in  $\gamma$  einen rechten Winkel.**

Bew.:

- Die Winkelsumme in den beiden Dreiecken  $\triangle AMC$  und  $\triangle CMB$  beträgt  $180^\circ$ .

$$(1) \alpha + \varepsilon_1 + \gamma_1 = 180^\circ \text{ und } \varepsilon_2 + \beta + \gamma_2 = 180^\circ$$

- Die beiden Dreiecke  $\triangle AMC$  und  $\triangle CMB$  sind gleichschenkelig, da je zwei Seiten so lang wie  $r$  (Kreisradius) sind, d. h. das  $b$  die Basis von  $\triangle AMC$  und  $a$  die Basis von  $\triangle CMB$  ist. Damit gilt nach dem Basiswinkelsatz:

$$(2) \alpha = \gamma_1 \text{ und } \gamma_2 = \beta$$

- Einsetzen in die Gleichungen (1) ergibt:

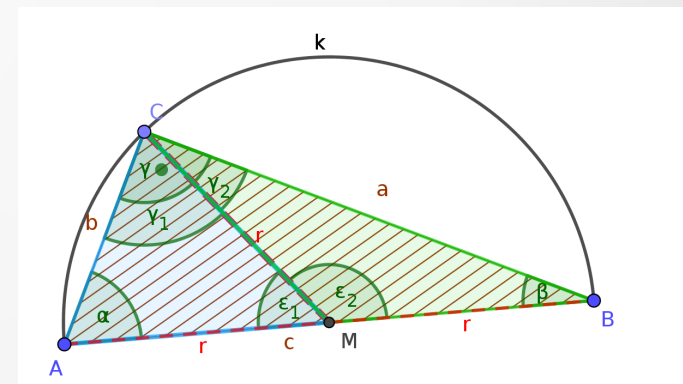
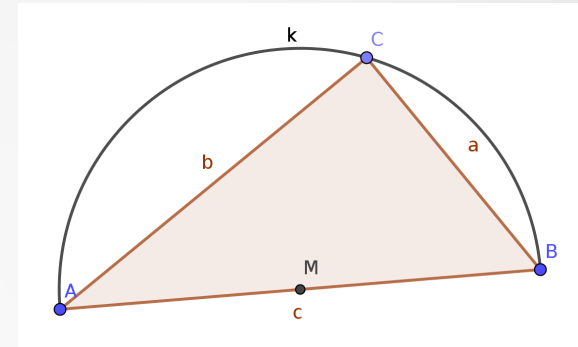
$$(1^*) \gamma_1 + \varepsilon_1 + \gamma_1 = 180^\circ \text{ und } \varepsilon_2 + \gamma_2 + \gamma_2 = 180^\circ \text{ bzw.} \\ \varepsilon_1 + 2\gamma_1 = 180^\circ \text{ und } \varepsilon_2 + 2\gamma_2 = 180^\circ$$

- $\varepsilon_1$  ist Nebenwinkel von  $\varepsilon_2$ , d.h.  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 180^\circ \mid -\varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 = 180^\circ - \varepsilon_2$

- Einsetzen (1\*) ergibt:

$$(1^{**}) 180^\circ - \varepsilon_2 + 2\gamma_1 = 180^\circ \mid -180^\circ \Leftrightarrow -\varepsilon_2 + 2\gamma_1 = 0^\circ \mid +\varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 = 2\gamma_1$$

$$\text{und Einsetzen in (1*) ergibt: } 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 180^\circ \mid :2 \Leftrightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ \text{ q.e.d.}$$



## 9.1. Die Quadratwurzel

Unter der Quadratwurzel aus  $a$  ( $\sqrt{a}$ ) verstehen wir diejenige nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert  $a$  ergibt.

- Die Zahl unter der Wurzel nennen wir **Radikand**, die Tätigkeit **radizieren** ([quadrat]wurzelziehen).
- Beachte: Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist also nicht definiert (genau so wie das Teilen durch die Zahl Null).
- $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$  für alle  $a \geq 0$

## 9.2. Rechnen mit Quadratwurzeln

Rechenregeln:

1)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$  für alle  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$

2)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  für alle  $a \geq 0$  und  $b > 0$

3) Achtung!  $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  wenn  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$

4)  $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{x} = (a \pm b)\sqrt{x}$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und für alle  $x \geq 0$

5)  $\sqrt{a^2} = |a|$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ , weil bei negativem  $a$  ansonsten das Ergebnis auf der rechten Seite negativ würde. Auf der linken Seite steht aber immer per definitionem eine nicht negative Zahl.

# 10. Satz des Pythagoras

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck:

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennen wir die **Hypotenuse**. Sie ist die längste Seite im Dreieck.

Die Seiten, die die Schenkel des rechten Winkels bilden, diesen also einschließen, nennen wir die **Katheten**.

**Satz des Pythagoras:**

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten.

# 10.1. Beweis des Satzes des Pythagoras

Zeichne ein Quadrat mit den wie in der Abb. unterteilten Seitenlängen  $a+b$ .

Wenn Du benachbarte Teilpunkte auf den Quadratseiten verbindest, entstehen vier Dreiecke, die alle rechtwinklig sind.

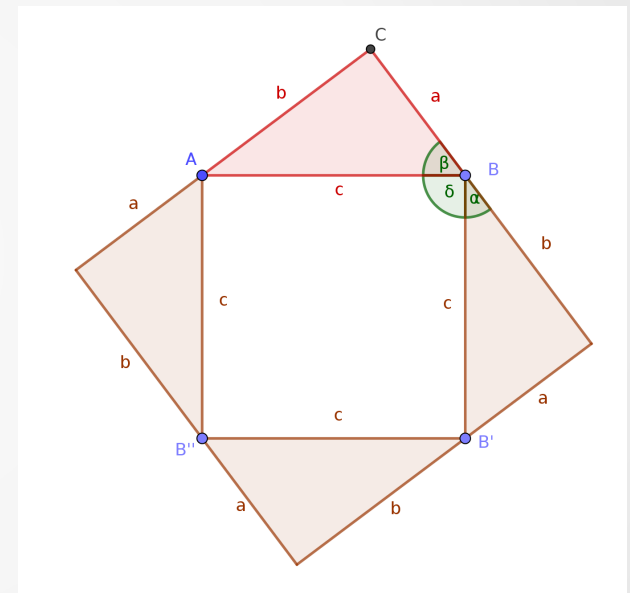
Da deren Katheten jeweils von  $a$  und  $b$  gebildet werden, sind die Dreiecke nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent. Die Verbindungslinien sind also alle gleich groß und wir nennen sie  $c$ .

Der Winkel  $\delta$ , in dem diese Linien aufeinander stoßen ist  $90^\circ$ , weil

- a) seine Nebenwinkel jeweils  $\alpha$  und  $\beta$  sind.
- b) Auf Grund des Winkelsummensatzes im Dreieck  $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$  also  $\alpha + \beta = 90^\circ$
- c) Alle drei Winkel zusammen einen gestreckten Winkel ergeben also  $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$  woraus  $\delta = 90^\circ$  folgt.

Die weiße innenliegende Fläche ist also ein Quadrat und besitzt den Flächeninhalt  $c^2$ . Sie lässt sich aber auch aus dem großen Quadrat berechnen:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\Delta = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$



## 10.2. Höhensatz des Euklid und Beweis

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe  $h$  über der Hypotenuse diese in die Längenabschnitte  $q$  und  $p$  teilt, so gilt für die Länge der Höhe:

$$h^2 = p \cdot q$$

Bew.:

$$b^2 = h^2 + q^2$$

$$a^2 = h^2 + p^2$$

$$c = p + q$$

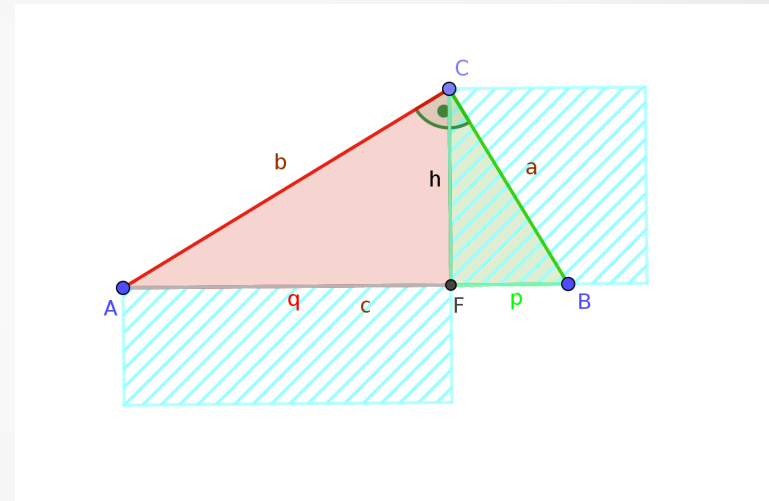
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 + p^2 + h^2 + q^2 = (p+q)^2$$

$$2h^2 + p^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2 \quad | - p^2 - q^2$$

$$2h^2 = 2pq \quad | :2$$

$$h^2 = pq$$



# x. Antiproportionale Zuordnungen

Zuordnungen, die sich nach der Regel „Je mehr, desto weniger“ verhalten (Jedem Vielfachen des x-Wertes wird der entsprechende Anteil des y-Wertes zugeordnet), nennen wir **antiproportional**.

Die Zuordnungsvorschrift für antiproportionale Zuordnungen lautet

$$x \rightarrow q / x$$

$$y(x) = q / x$$

Antiproportionale Zuordnungen sind **produktgleich**, d.h. multipliziert man bei einem Wertepaar (Punkt P(x|y)) den y-Wert mit dem x-Wert, so erhält man immer den gleichen Wert q.

$$y \cdot x = q$$

Beispiel:  $y(x) = 4 / x$

|         |   |   |     |     |
|---------|---|---|-----|-----|
| x       | 2 | 4 | 5   | 10  |
| y       | 2 | 1 | 0,8 | 0,4 |
| p=y · x | 4 | 4 | 4   | 4   |