

Übungsaufgaben 2 – Lösungen

1. Eine Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ geht durch den Punkt P(6 | 8 | 2)

a) Bestimme für E eine Ebenengleichung in Normalenform.

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

b) Bestimme für E eine Ebenengleichung in Koordinatenform.

$$E: x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 + 24 - 10 = 20$$

c) Liegen die Punkte A(8 | 9 | 3) und B(11 | 6 | 2) in der Ebene?

$$1 \cdot 8 + 3 \cdot 9 - 5 \cdot 3 = 8 + 27 - 15 = 20 \Rightarrow A \in E$$

$$1 \cdot 11 + 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 11 + 18 - 10 = 19 \neq 20 \Rightarrow A \notin E$$

d) Gebe die Gleichung einer zu E echt parallelen Ebene an.

$$z.B.: F: x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 15$$

e) Bestimme den Abstand des Punktes R(6 | 3 | -6) von dieser Ebene.

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$$

$$d = \left| \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{25}{\sqrt{35}} \approx 4,23$$

2. Wandle die Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ in die Normalenform um.

$$\begin{array}{l} 6 \quad 7 \\ 8 \quad 6 \\ 2 \quad 4 \\ 6 \quad 7 \\ 8 \quad 6 \\ 2 \quad 4 \end{array}$$

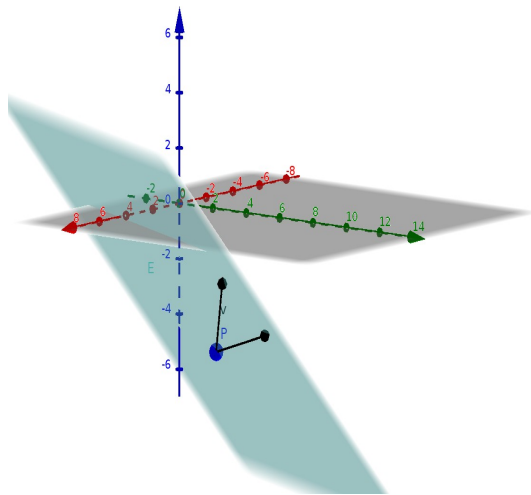
$$\begin{array}{l} 32 - 12 = 20 \\ 14 - 24 = -10 \\ 36 - 56 = -20 \end{array}$$

$$\text{Nehme für } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 - 8 - 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 14 - 6 - 8 = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right] = 0$$



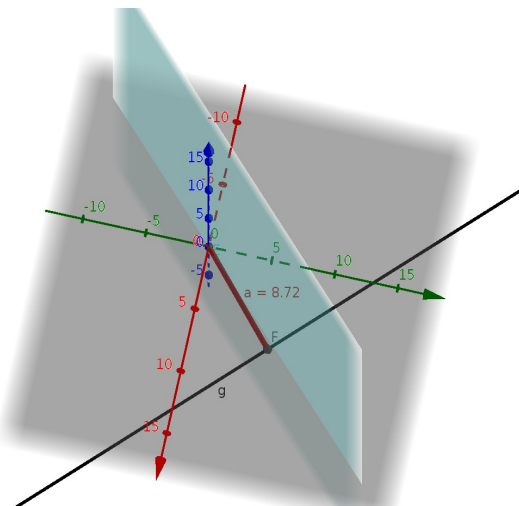
3. Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Berechne den Abstand des Ursprungs von der Geraden. Bestimme E senkrecht zu g durch O, dann den Schittpunkt D von Gerade und Ebene, dann den Abstand von D zu O:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 9 + t - (3 - t) = 0 \Leftrightarrow 2t = -6 \Leftrightarrow t = -3$$

$$\text{Durchstoßpunkt: } \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(6; 6; -2)$$

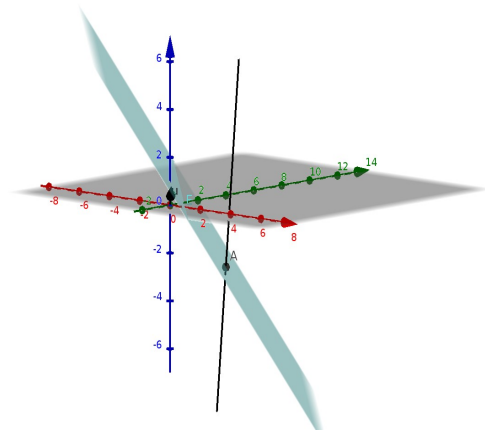
$$d = |\vec{OD}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{76} \approx 8,72$$



4. Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad E: x_1 + x_2 + x_3 = 1$

a) Bestimme den Durchstoßpunkt der Gerade durch die Ebene. Einsetzen in Koordinatenform

$$1 + t + 3 - t - 2 + t = 1 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0; 4; -3)$$



b) Fälle vom Stützpunkt der Geraden P(1|3|-2) das Lot auf die Ebene E. Ermittle die Lotgeradengleichung und den Lotfußpunkt.

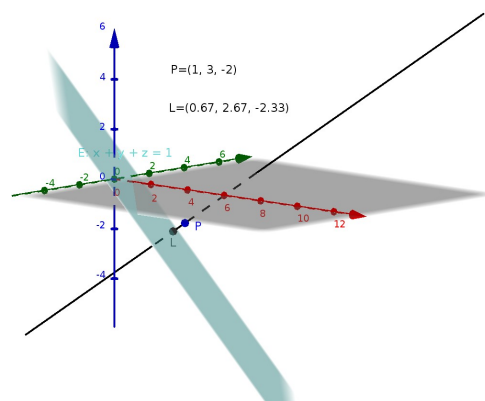
Problemstellung: Fälle das Lot von einem Punkt auf eine Ebene.

Der Normalenvektor der Ebene wird Richtungsvektor der zu bestimmenden Lotgeraden, denn die Lotgerade verläuft senkrecht zur Ebene, also in Richtung von $\vec{n}$. Außerdem ist P Aufpunkt der Lotgeraden.

Anschließend erfolgt dann folgt die Schnittpunktbestimmung (durch Einsetzen von g in E).

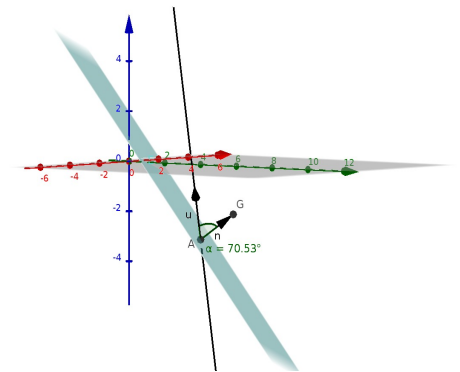
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad E: x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow 1 + t + 3 + t - 2 + t = 1 \Leftrightarrow 3t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow F\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$



- c) Ermittle den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene.

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 70,53^\circ$$



5. Gegeben sind die Punkte A(1|-1|-7); B(17|-1|-5); C(-8|-2|5); D(1|7|7)

- Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
- Berechne den Abstand des Punktes D von der Ebene durch die Punkte A, B und C.

Alle Lösungen sind ohne Gewähr!!!