Lösungen des Übungsblattes zur 4. Klassenarbeit

1a) $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

$\cos 36^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \sin(54^\circ)$

b) $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

$\sin(57^\circ) = \cos(90^\circ - 57^\circ) = \cos 33^\circ$

c) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$

$\left(\frac{2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{(\sqrt{3})}{=} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Ansatz: Zeichne in einem gleichseitigen Dreieck die Höhe h ein.

Mit dem Satz des P. ergibt sich:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Beweis zur Frage, warum sich bei einem Winkel von 30° diese „besonderen“ Werte ergeben.

d) $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

$(\cos\alpha)^2 = 1 - (\sin\alpha)^2$

$= 1 - 0{,}49^2$

$= 0{,}7599 \quad | \sqrt{}$

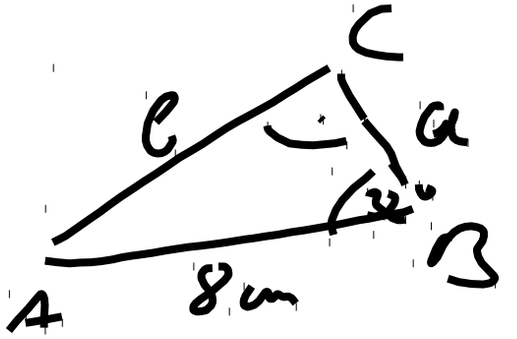
$\cos\alpha = 0{,}8717$

Zur Kontrolle: sin-1(α) = 29,34°

sin (29,34°) = 0,8717

2a) $\cos 32^\circ = \frac{a}{8\,cm} \Leftrightarrow a = 6{,}78\,cm$

$\sin 32^\circ = \frac{b}{8\,cm} \Leftrightarrow b = 4{,}24\,cm$

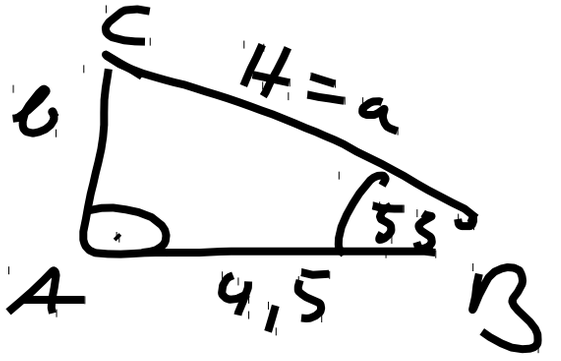


$\alpha = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

b) $\cos 55^\circ = \frac{4{,}5\,cm}{a}$ $\quad a = 7{,}85\,cm$

$\left(\sin 55^\circ = \frac{b}{a} \right)$ besser

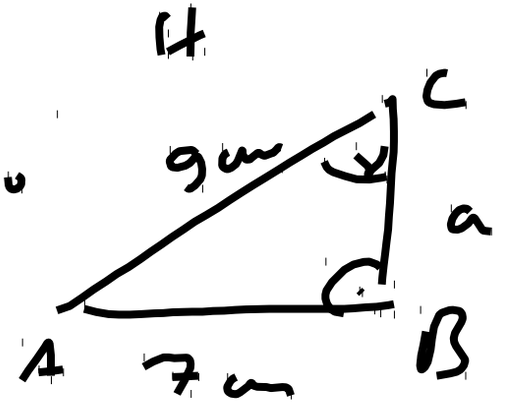
$\tan 55^\circ = \frac{b}{4{,}5\,cm}$ $\quad b = 6{,}43\,cm$



$\alpha = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

c) $\sin \gamma = \frac{7\,cm}{9\,cm}$ $\quad \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) = 51{,}06^\circ$

$\cos \gamma = \frac{a}{9\,cm}$ $\quad a = 5{,}66\,cm$



$\alpha = 90^\circ - \gamma = 38{,}94^\circ$

d) nicht lösbar, da die Hypotenuse b nicht die längste Seite ist.

Aufgabe 3a) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta$

$b = 5{,}76\,cm$

$\gamma = 180^\circ - 95^\circ - 35^\circ = 50^\circ$

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma$

$c = 7{,}69\,cm$

$A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma = 22{,}0532\,cm^2$

b) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot b$

$\beta = 67{,}81^\circ$

$\gamma = 180° - 99° - 67{,}81° = 13{,}19°$

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma$ $\quad c = 0{,}74\,cm$

$A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma =$ 1,095 cm^2

3c) γ = 180° - 50° - 30° = 100°

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}=\frac{a}{c}\Leftrightarrow a=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}\cdot c$$; a = 4,67 cm

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow b=\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}\cdot c$$; b = 3,05 cm

$$A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(\alpha)=7\,cm^2$$

d) $$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow \sin(\beta)=\frac{b}{c}\cdot\sin(\gamma)=0{,}6687$$

β = 41,97° v β = 180° – 41,97° = 138,03°

1. Fall: α = 180° – 32° – 41,97° = 106,03°

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}=\frac{a}{c}\Leftrightarrow a=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}\cdot c$$; a = 7,62 cm

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(\gamma)=10{,}6971\,cm^2$$

2. Fall: α = 180° – 32° – 138,03° = 9,97°

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}=\frac{a}{c}\Leftrightarrow a=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}\cdot c$$; a = 1,37 cm

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(\gamma)=1{,}9265\,cm^2$$

4 a) Kosinussatz: (SWS: d.h. eine Lösung)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$= 7{,}4^2 + 6{,}8^2 - 2 \cdot 7{,}4 \cdot 6{,}8 \cdot \cos(100) = 118{,}48$$

a = 10,88 cm

Möglichkeit 1: Ausrechnung von b mittels des Kosinussatzes:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \mid -a^2, -c^2$$

$$b^2 - a^2 - c^2 = -2ac \cdot \cos(\beta) \mid : (-2ac)$$

$$\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \cos(\beta)$$ liefert: β = 42,03°

Möglichkeit 2: Ausrechnung von b mittels des Sinussatzes:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = 0{,}6695 \Leftrightarrow \beta = 42{,}03°$$

γ= 180° - 100° - 42,03° = 37,97°

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = 24{,}7778\, cm^2$$

4 b) Kosinussatz: (SSS: d.h. 1 Lösung)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad | -b^2; -c^2$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos(\alpha) \quad | : (-2bc)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = -0{,}7692 \Leftrightarrow \alpha = 39{,}72°$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow \sin(\gamma) = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{a} = 0{,}7609 \Leftrightarrow \gamma = 49{,}54°$$

$$\alpha = 180° - 39{,}72 - 49{,}54° = 90{,}74°$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = 1634.7435\, cm^2$$

Achtung: Wir haben zu Hause festgestellt, dass mit unterschiedlichen Taschenrechner große Abweichungen herauskommen. Das Ergebnis wurde nur In dieser Reihenfolge mit dem TI 30 x IIS erzielt und stimmt mit Geogebra überein. Aber keine Panik, der Rechenweg entscheidet in solchen Fällen.

4 c) Kosinussatz: (SWS: d.h. 1 Lösung)

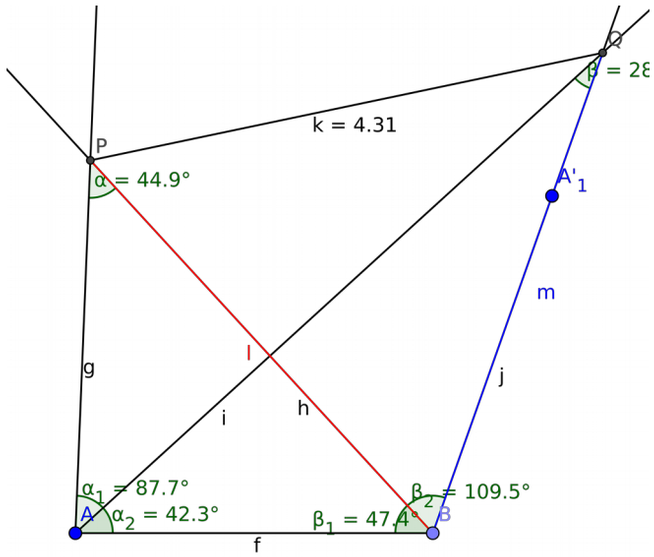
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) = 6{,}7377 \Leftrightarrow c = 2{,}60$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c} = 0{,}9994 \Leftrightarrow \alpha = 88{,}04°$$

$$\beta = 180° - 12{,}7 - 88{,}04° = 79{,}26°$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = 15{,}0462\, cm^2$$

Aufgabe 5:



$$\frac{\overline{PB}}{\sin(\alpha_1)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180° - \alpha_1 - \beta_1)} \Leftrightarrow \overline{PB} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180° - \alpha_1 - \beta_1)} \cdot \sin(\alpha_1) = 4{,}17\,km$$

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180° - \alpha_2 - \beta_2)} \Leftrightarrow \overline{BQ} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180° - \alpha_2 - \beta_2)} \cdot \sin(\alpha_2) = 4{,}19\,km$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{BP}^2 - 2\,\overline{BQ} \cdot \overline{BP} \cdot \cos(\beta_2 - \beta_1)$$

$$\overline{PQ}^2 = 4{,}17^2 + 4{,}19^2 - 2 \cdot 4{,}17 \cdot 4{,}19 \cdot \cos(62.1°) = 18{,}5820$$

$$\Leftrightarrow c = 4{,}3107\,km$$